

SISUKORD

1. PROTSENTARVUTUSE PÕHIÜLESANDED I
2. PROTSENTARVUTUSE PÕHIÜLESANDED II
3. SUURUSE KASVAMINE JA KAHANEMINE PROTSENTIDES
4. KONTROLLHARJUTUS
5. KONTROLLHARJUTUSE VASTUSED
6. TEHTED HARILIKE MURDUDEGA
7. TEHTED ALGERBALISTE MURDUDEGA
8. ARVUTAMISE ABIVALEMID JA NENDE KASUTAMINE
9. RATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE
10. RATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE II
11. RATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE III
12. MURDVÕRRANDITE LAHENDAMINE
13. MURDVÕRRANDITE LAHENDAMINE II
14. TEKSTÜLESANNETE LAHENDAMINE (LIIKUMINE)
15. KIIRTETEOREEM
16. KOLMNURKADE VÕRDSUSE TUNNUSED
17. KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED
18. HULKNURKADE SARNASUS
19. MEETRILISED SEOSSED KOLMNURGAS
20. MEETRILISED SEOSSED KOLMNURGAS II
21. KOLMNURK
22. HULKNURK
23. SILINDER
24. KOONUS JA KERA
25. PÜRAMIID
26. RUUTFUNKTSIOON $y = ax^2, a > 0$
27. RUUTFUNKTSIOON $y = ax^2, a < 0$
28. Funktsioon $y = ax^2 + bx, a > 0$
29. Funktsioon $y = ax^2 + bx, a < 0$
30. Funktsioon $y = ax^2 + c, a > 0$
31. Funktsioon $y = ax^2 + c, a < 0$
32. Funktsioon $y = ax^2 + bx + c, a > 0$
33. Funktsioon $y = ax^2 + bx + c, a < 0$
34. Lineaarfunktsiooni graafik
35. Pöörvõrdelise seose graafik ($y = k : x, k > 0$)
36. Pöörvõrdelise seose graafik ($y = k : x, k < 0$)
37. STATISTIKA ELEMENDID

1. PROTSENTARVUTUSE PÕHIÜLESANDED I

1. Protsendi leidmine arvust

Leida A % arvust B

$$X = \frac{A}{100} \cdot B$$

Näide 1. Leiame 45% arvust 350.

$$X = \frac{45}{100} \cdot 350 = 157,5$$

Näide 2. Leiame 225% arvust 90.

$$X = \frac{225}{100} \cdot 90 = 202,5$$

2. Mitu protsenti moodustab üks arv teisest ?

Mitu protsenti moodustab arv A arvust B ?

$$X = \frac{A}{B} \cdot 100 \%$$

Näide 1. Mitu protsenti moodustab 25 240-st ?

$$X = \frac{25}{240} \cdot 100\% = 10,4\% \text{ (see tulemus on ümardatud)}$$

Täpne väärtus on $10\frac{5}{12}\%$.

Näide 2. Mitu protsenti moodustab 350 120-st ?

$$X = \frac{350}{120} \cdot 100\% = 291,7\% \text{ (see tulemus on ümardatud)}$$

Täpne väärtus on $291\frac{2}{3}\%$.

2. PROTSENTARVUTUSE PÕHIÜLESANDED II

3. Osa järgi terve leidmine

Leida arv, kui A% temast on B.

| | |
|------|---|
| A% | B |
| 100% | X |

$$X = \frac{100 \cdot B}{A}$$

Näide 1. Leiame arvu, millest 35% on 140.

$$X = \frac{100 \cdot 140}{35} = 400.$$

Näide 2. Leiame 25% arvust, millest 60% on 300.

| | |
|------|-----|
| 60 % | 300 |
| 25 % | X |

$$X = \frac{25 \cdot 300}{60} = 125$$

Näide 3. Korvpallur on sooritanud 30 pealeviset 60% tabavusega. Mitu korda peaks ta nüüd järjest tabama, et tabavuse protsent oleks 80.

Korvpallur on tabanud 18 korral 30-st (60 % 30-st).

Kui nüüd teeb veel x viset, siis viskeid on kokku $30 + x$

Tabamusi on kokku $18 + x$

Tabavuse protsent on 80.

$$\frac{18 + x}{30 + x} \cdot 100\% = 80\%, \text{ ehk}$$

$$\frac{18 + x}{30 + x} = 0,8$$

millest $x = 30$. Seega tuleb sooritada järjest 30 tabavat viset.

3. SUURUSE KASVAMINE JA KAHANEMINE PROTSENTIDES

SUURUSE KASVAMINE PROTSENTIDES

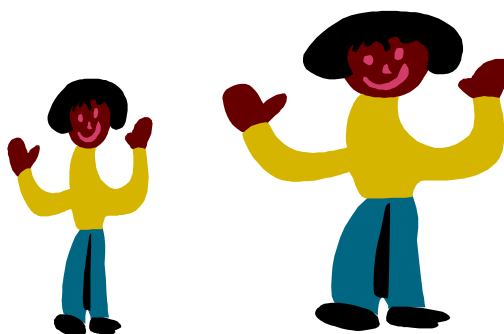
Koolivaheajal olles muutus Peetrikese kaal 55-lt kilolt 74 kiloni. Pikkus suurenes 4 cm võrra. Kumb suurustest pikkus või kaal muutus rohkem? Koolivaheaja algul oli Peetrikese pikkus 170 cm.

$$\text{Muutus(\%)} = \frac{\text{lõppväärtus} - \text{algväärtus}}{\text{algväärtus}} \cdot 100\%$$

Tähistame suuruse muutuse tähega M, siis

$$M_{\text{kaal}} = \frac{74 - 55}{55} \cdot 100 \% = 34,5 \%$$

$$M_{\text{pikkus}} = \frac{174 - 170}{170} \cdot 100 \% = 2,35 \%$$



Ülesanne. Rongipileti hind tõuseb 10-lt kroonilt 20 kroonini. Kas hind tõuseb 50 % või 100 % ?

SUURUSE KAHANEMINE PROTSENTIDES

Arvutuskeem:

$$\text{muutus(\%)} = \frac{\text{algväärtus} - \text{lõppväärtus}}{\text{algväärtus}} \cdot 100\%$$

Näide. Tööpäev lühenes 8-lt tunnilt 7-le ja päevapalk, mis oli esialgu 200 krooni langes 180 kroonile. Kumb vähenes rohkem, kas tööaeg või palk?

$$M_{\text{tööaeg}} = \frac{8 - 7}{8} \cdot 100 \% = 12,5\%$$

$$M_{\text{palk}} = \frac{200 - 180}{200} \cdot 100 \% = 10\%$$

Vastus: tööaeg vähenes rohkem

4. KONTROLLHARJUTUS

Täida tabel. Leia 25% tabelis olevatest arvudest?

| | | | | | | | | | |
|------------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|-----------|-----------|
| arv | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| 25% | | | | | | | | | |

Täida tabel. Leia 150% tabelis olevatest arvudest?

| | | | | | | | | | |
|-------------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|-----------|-----------|
| arv | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| 150% | | | | | | | | | |

Täida tabel. Kui mitu protsenti moodustab arv a arvust b?

| | | | | | | | | | |
|---------------|-----------|----------|------------|----------|----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| a | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| b | 10 | 5 | 102 | 4 | 0 | 1 | 10 | 10 | 8 |
| vastus | | | | | | | | | |

Täida tabel. Leia arv, kui a% sellest on b?

| | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-------------|
| a% | 5% | 2% | 102% | 0% | 4% | 10% | 1% | 12% | 10% |
| b | 5 | 10 | 204 | 0 | 3 | 6,5 | 2,7 | 8 | 0,04 |
| arv | | | | | | | | | |

Täida tabel. Kui mitme protsendi võrra suurus muutub?

| | | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|----------|------------|-----------|
| algv | 5 | 2 | 8 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| lõppv | 6 | 1 | 0 | 8 | 12 | 12 | 4 | 1,2 | 1 |
| | | | | | | | | | |

5. KONTROLLHARJUTUSE VASTUSED

Täida tabel. Leia 25% tabelis olevatest arvudest?

| | | | | | | | | | |
|------------|-------------|------------|-------------|----------|----------|------------|-------------|-----------|------------|
| arv | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| 25% | 1,25 | 0,5 | 25,5 | 0 | 1 | 25 | 0,25 | 3 | 2,5 |

Täida tabel. Leia 150% tabelis olevatest arvudest?

| | | | | | | | | | |
|-------------|------------|----------|------------|----------|----------|------------|------------|-----------|-----------|
| arv | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| 150% | 7,5 | 3 | 153 | 0 | 6 | 150 | 1,5 | 18 | 15 |

Täida tabel. Kui mitu protsenti moodustab arv a arvust b?

| | | | | | | | | | |
|---------------|------------|------------|-------------|-----------|----------|---------------|------------|-------------|-------------|
| a | 5 | 2 | 102 | 0 | 4 | 100 | 1 | 12 | 10 |
| b | 10 | 5 | 102 | 4 | 0 | 1 | 10 | 10 | 8 |
| vastus | 50% | 40% | 100% | 0% | - | 10000% | 10% | 120% | 125% |

Täida tabel. Leia arv, kui a% sellest on b?

| | | | | | | | | | |
|------------|------------|------------|-------------|----------------|-----------|------------|------------|--------------|-------------|
| a% | 5% | 2% | 102% | 0% | 4% | 10% | 1% | 12,5% | 10% |
| b | 5 | 10 | 204 | 0 | 3 | 6,5 | 2,7 | 8 | 0,04 |
| arv | 100 | 500 | 200 | lga arv | 75 | 65 | 270 | 64 | 0,4 |

Täida tabel. Kui mitme protsendi võrra suurus muutub?

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------------|-------------|--------------|-----------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|
| algv | 5 | 2 | 8 | 8 | 4 | 10 | 1 | 12 | 10 |
| lõppv | 6 | 1 | 0 | 8 | 12 | 12 | 4 | 1,2 | 1 |
| muutus | +20% | -50% | -100% | 0% | +200% | +20% | +300% | -90% | -90% |

6. TEHTED HARILIKE MURDUDEGA

1. Liitmine

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\text{Näide: } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$$

2. Lahutamine

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\text{Näide: } \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15}$$

3. Korrutamine

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{Näide: } \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8}$$

4. Jagamine

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\text{Näide: } \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{9}{10}$$

KÜMNENDMURRU TEISENDAMINE HARILIKUKS MURRUKS

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots = \frac{13}{13} = \dots$$

$$1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$2,434 = \frac{2434}{1000} = 2 \frac{217}{500}$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$0,105 = \frac{105}{1000} = \frac{21}{200}$$

$$0,10203 = \frac{10203}{100000}$$

7. TEHTED ALGERBALISTE MURDUDEGA

Jäävad kehtima kõik reeglid, mis kehtivad harilike murdude korral!

1. Liitmine

$$\frac{a}{2b} + \frac{c}{3d} = \frac{3ad + 2bc}{6bd}$$

2. Lahutamine

$$\frac{x}{2yz} - \frac{y}{3xz} = \frac{3x^2 - 2y^2}{6xyz}$$

3. Korrutamine

$$\frac{xy}{z^2} \cdot \frac{y}{x^3z^2} = \frac{xy^2}{x^3z^4}$$

4. Jagamine

$$\frac{xy}{z^2} : \frac{x^2y^3}{z^4} = \frac{xyz^4}{z^2x^2y^3} = \frac{z^2}{xy^2}$$

5. Astendamine

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^3 = \frac{2^3 \cdot x^3}{3^3 \cdot y^3} = \frac{8x^3}{27y^3}$$

$$\left(-\frac{2a^2b}{c^3}\right)^3 = -\frac{8a^6b^3}{c^9} \qquad \left(-\frac{2a^2b}{c^3}\right)^4 = \frac{16a^8b^4}{c^{12}}$$

8. ARVUTAMISE ABIVALEMID JA NENDE KASUTAMINE

| | | |
|---|---------------|---|
| 1 | Ruutude vahe | $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ |
| 2 | Summa ruut | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| 3 | Vahe ruut | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| 4 | Kuupide summa | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| 5 | Kuupide vahe | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| 6 | Summa kuup | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| 7 | Vahe kuup | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |

Näited:

- $4x^2 - 25y^4 = (2x - 5y^2)(2x + 5y^2)$
- $(3x + 4yz^2)^2 = 9x^2 + 24xyz^2 + 16y^2z^4$
- $(4 - 3y)^2 = 16 - 24y + 9y^2$
- $27 + 8y^3 = (3 + 2y)(9 - 6y + 4y^2)$
- $125 - 27z^6 = (5 - 3z^2)(25 + 15z^2 + 9z^4)$
- $(3 + 2x)^3 = 27 + 54x + 36x^2 + 8x^3$
- $(1 - 5x)^3 = 1 - 15x + 75x^2 - 125x^3$

Jäta meelde, et

$$\begin{aligned}
 a - b &= -(b - a) \\
 (a - b)^2 &= (b - a)^2 \\
 (-a - b)^2 &= (a + b)^2 \\
 (a - b)^3 &= -(b - a)^3 \\
 (-a - b)^3 &= -(a + b)^3
 \end{aligned}$$

9. RATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE

Tehete järjekord:

1. Astendamine
2. Korrutamine ja jagamine
3. Liitmine ja lahutamine

Kui avaldises on sulud, siis seal tehakse tehted kõigepealt!

Murde sisaldavate avaldiste lihtsustamisel:

- a) määratakse tehete järjekord;
- b) tehakse tehted;
- c) vastus korrastatakse (võimalusel taandatakse).

Sageli on vaja murru nimetajat enne tehete tegemist tegurdada.

Näide 1. Lihtsustame avaldise $\left(\frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x - y} \right) \cdot \frac{x - y}{xy}$

Tehete järjekord: 1) sulgudes liitmine 2) korrutamine

$$1. \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x - y} = \frac{2y}{(x - y)(x + y)} + \frac{1}{x - y} = \frac{2y + x + y}{(x + y)(x - y)} = \frac{x + 3y}{(x - y)(x + y)}$$

$$2. \frac{x + 3y}{(x + y)(x - y)} \cdot \frac{x - y}{xy} = \frac{x + 3y}{xy(x + y)}$$

Näide 2. Lihtsustame avaldise $\frac{3x^2}{1 - x^2} : \left(1 + \frac{1}{x - 1} \right)$

Tehete järjekord: 1) sulgudes liitmine 2) jagamine

$$1. 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{x - 1 + 1}{x - 1} = \frac{x}{x - 1}$$

$$2. \frac{3x^2}{1 - x^2} : \frac{x}{x - 1} = \frac{3x^2(x - 1)}{(1 - x)(1 + x)x} = -\frac{3x^2(x - 1)}{(x - 1)(1 + x)x} = -\frac{3x}{1 + x}$$

10. RATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE II

Kui avaldises on ruutkolmliige, siis see tavaliselt tegurdatakse!

Ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ tegurdamiseks lahendatakse ruutvõrrand

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Kui sellel võrrandil on lahendid, siis saab ruutkolmliikme esitada kujul

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kus x_1 ja x_2 on võrrandi lahendid.

Näide: lihtsustame avaldise $\frac{-7}{2x^2 - 5x - 3} + \frac{6}{x^2 - 9}$

Tegurdame ruutkolmliikme $2x^2 - 5x - 3$.

Lahendame võrrandi $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Selle lahendid on $x_1 = 3$, $x_2 = -0,5$

$$\begin{aligned} & \frac{-7}{2x^2 - 5x - 3} + \frac{6}{x^2 - 9} = \\ & = \frac{-7}{2(x-3)(x+0,5)} + \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \\ & = \frac{-7}{(x-3)(2x+1)} + \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \\ & = \frac{-7(x+3) + 6(2x+1)}{(x-3)(2x+1)(x+3)} = \\ & = \frac{-7x - 21 + 12x + 6}{(x-3)(2x+1)(x+3)} = \\ & = \frac{5x - 15}{(x-3)(2x+1)(x+3)} = \\ & = \frac{5(x-3)}{(x-3)(2x+1)(x+3)} = \\ & = \frac{5}{(2x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

11. RATSIONAALVAALDISTE LIHTSUSTAMINE III

Mõnikord on avaldise lihtsustamisel vaja kasutada rühmitamisvõtet.

Näide. Lihtsustame avaldise $\left(\frac{c+2}{ac+2a-3c-6} + \frac{a}{2a-6}\right) \cdot \left(\frac{ab^2-3b^2}{b^2-9} + \frac{27-9a}{b^2-9}\right)$

Lihtsustame mõlemad sulgavaldised eraldi, alles siis korrutame

Esimene sulgavaldis:

$$\begin{aligned} \frac{c+2}{ac+2a-3c-6} + \frac{a}{2a-6} &= \frac{c+2}{a(c+2)-3(c+2)} + \frac{a}{2(a-3)} = \\ &= \frac{c+2}{(c+2)(a-3)} + \frac{a}{2(a-3)} = \frac{1}{a-3} + \frac{a}{2(a-3)} = \frac{2+a}{2(a-3)}. \end{aligned}$$

Teine sulgavaldis:

$$\begin{aligned} \frac{ab^2-3b^2}{b^2-9} + \frac{27-9a}{b^2-9} &= \frac{ab^2-3b^2+27-9a}{b^2-9} = \\ &= \frac{b^2(a-3)+9(3-a)}{b^2-9} = \frac{b^2(a-3)-9(a-3)}{b^2-9} = \frac{(b^2-9)(a-3)}{b^2-9} = a-3 \end{aligned}$$

Korrutame saadud tulemused:

$$\frac{2+a}{2(a-3)} \cdot (a-3) = \frac{2+a}{2} = 1 + 0,5a$$

Seega avaldis lihtsustub kujule $1 + 0,5a$.

12. MURDVÖRRANDITE LAHENDAMINE

Võrde põhiomaduse kasutamine.

Näide 1. Lahendame võrrandi $\frac{2x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 2$

Võrde põhiomadust kasutades saame:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x + 2 &= 2(x^2 - 2x + 1), \\ 2x^2 + x + 2 &= 2x^2 - 4x + 2, \text{ millest} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Murdvõrrandi lahendeid tuleb alati kontrollida!

Näide 2. Lahendame võrrandi $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y-1)} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \Rightarrow \\ \frac{1}{y(y-1)} &= \frac{y-1+y}{y(y-1)} \Rightarrow \frac{1}{y(y-1)} = \frac{2y-1}{y(y-1)} \Rightarrow \frac{1}{y(y-1)} - \frac{2y-1}{y(y-1)} = 0 \Rightarrow \\ \frac{2(1-y)}{y(y-1)} &= 0 \end{aligned}$$

Murru väärtus on võrdne nulliga kui lugeja on null ja nimetaja nullist erinev.

Järelikult peavad olema täidetud tingimused, mis võib kirja panna nii:

$$\begin{cases} 1 - y = 0 \\ y(y - 1) \neq 0 \end{cases}$$

Esimese tingimuse kohaselt sobiks lahendiks $y = 1$, kuid teise tingimuse kohaselt $y \neq 0$ ja $y \neq 1$.

Võrrandil lahendeid ei ole.

13. MURDVÖRRANDITE LAHENDAMINE II

Arvutamise abivalemite kasutamine murdvõrrandite lahendamisel

Näide 1. Lahendame võrrandi $\frac{1}{y-3} - \frac{1}{3-y} = \frac{1}{y^2-9}$

$$\frac{1}{y-3} - \frac{1}{3-y} = \frac{1}{y^2-9} \Rightarrow \frac{1}{y-3} + \frac{1}{y-3} = \frac{1}{y^2-9} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{y-3} - \frac{1}{(y-3)(y+3)} = 0 \Rightarrow \frac{2(y+3)-1}{(y-3)(y+3)} = 0 \Rightarrow \frac{2y+5}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$\begin{cases} 2y+5=0 \Rightarrow y=-2,5 \\ (y-3)(y+3) \neq 0 \Rightarrow y \neq 3, y \neq -3 \end{cases}$$

Vastus: $y = -2,5$.

Näide 2. Lahendame võrrandi $\left(\frac{t}{t-1}\right)^2 + 4 = \frac{5t}{t-1}$

Seda võrrandit on kaval lahendada asendusvõttega:

Tähistame $\frac{t}{t-1} = u$.

Lahendame võrrandi $u^2 + 4 = 5u$ ehk $u^2 - 5u + 4 = 0$, millest $u_1 = 4$ ja $u_2 = 1$.

Seega tuleb lahendada kaks võrrandit:

1. $\frac{t}{t-1} = 4$, millest $t = \frac{4}{3}$ (kontrolli, kas sobib)

2. $\frac{t}{t-1} = 1$. Sellel võrrandil lahendid puuduvad.

Vastus: lahend on $t = \frac{4}{3}$.

14. TEKSTÜLESANNETE LAHENDAMINE (LIIKUMINE)



Allavoolu liikudes on paadi kiirus vee suhtes v_1 ja vee voolu kiirus kalda suhtes v_2 .
 Vastuvoolu liikudes liigub paat kalda suhtes kiirusega $v_1 - v_2$.
 Paat liigub kalda suhtes kiirusega $v_1 + v_2$.

Näide 1. Mööda 99 km pikkust jõge kulub edasi-tagasi sõiduks 20 tundi. Leia paadi kiirus vee suhtes kui jõe voolu kiirus on 1 km/h.

Koostame tabeli. Arvestame, et $\text{kiirus} = \frac{\text{tee pikkus}}{\text{aeg}}$ ($v = s : t$)

| | Tee pikkus (km) | Aeg (h) | Kiirus (km/h) |
|------------|-----------------|---------|---------------------|
| Allavoolu | 99 | x | $\frac{99}{x}$ |
| Vastuvoolu | 99 | 20 - x | $\frac{99}{20 - x}$ |

Allavoolu liikumisel on paadi kiirus kalda suhtes paadi kiirus seisva vee suhtes + voolu kiirus

Vastuvoolu liikumisel on paadi kiirus kalda suhtes paadi kiirus seisva vee suhtes – voolu kiirus

Järelikult

$$\frac{99}{x} - 1 = \frac{99}{20 - x} + 1$$

Seda murdvõrrandit lahendades jõuame ruutvõrrandini

$$x^2 - 119x + 990 = 0.$$

Lahenditeks saame $x_1 = 110$ ja $x_2 = 9$. Esimene lahend ilmselt ei sobi.

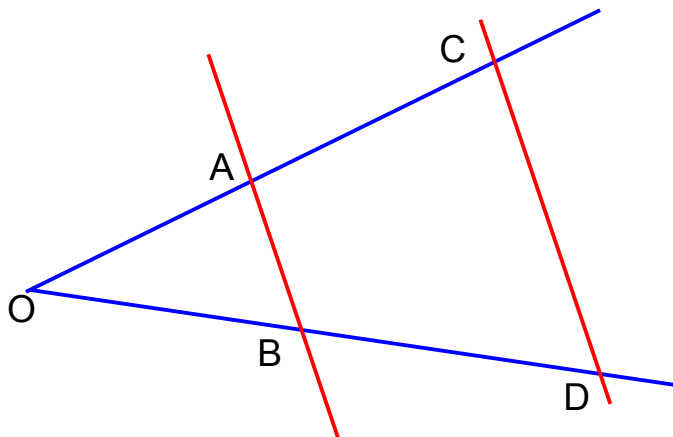
Vastus: paadi kiirus vee suhtes on 10 km/h.

15. KIIRTETEOREEM

Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis nurga ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Eeldus: $AB \parallel CD$

Väide: $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD}$



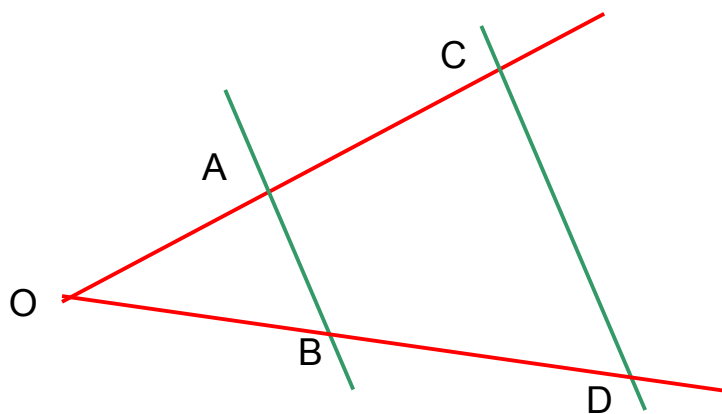
KIIRTEOREEMI PÖÖRDTEOREEM

Kui sirged lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teisel haaral tekkinud lõikudega, siis lõikesirged on paralleelsed.

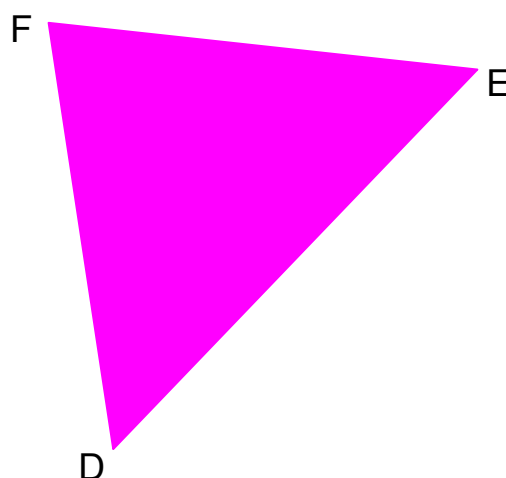
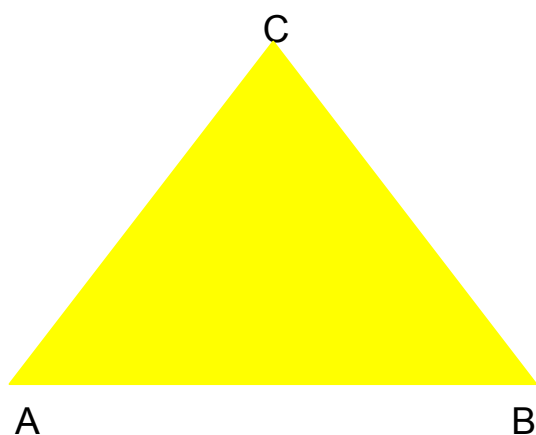
JÄRELDUS KIIRTETEOREEMIST

Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis on nurga haaral tekkinud lõigud võrdelised paralleelsetel sirgetel tekkinud lõikudega.

Väide: $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$



16. KOLMNURKADE VÕRDSUSE TUNNUSED



1. Tunnus KKK

Kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis need kolmnurgad on võrdsed.

2. Tunnus KNK

Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga, siis on kolmnurgad võrdsed.

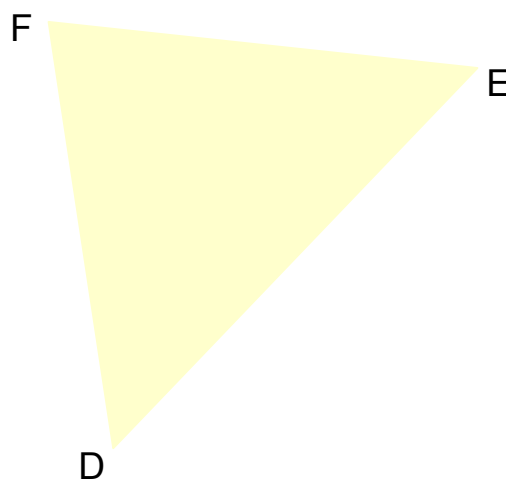
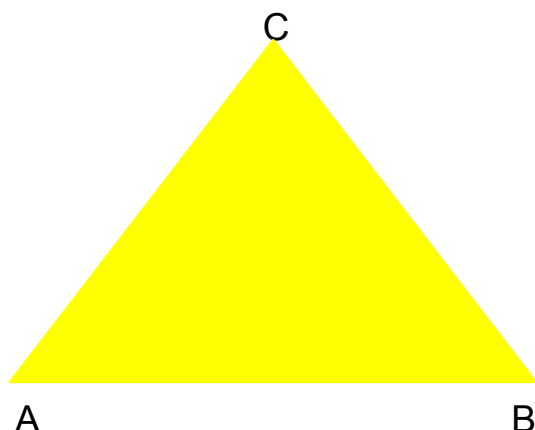
3. Tunnus NKN

Kui ühe kolmnurga üks külge ja selle lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga ühe külje ja selle lähisnurkadega, siis on kolmnurgad võrdsed.

4. Tunnus KKN

Kui ühe kolmnurga kaks külge ja pikema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja pikema külje vastasnurgaga, siis on kolmnurgad võrdsed.

17. KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED



1. Tunnus

Kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdelised teise kolmnurga kolme küljega, siis need kolmnurgad on sarnased.

2. Tunnus

Kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nendevahelise nurgad on võrdsed, siis kolmnurgad on sarnased.

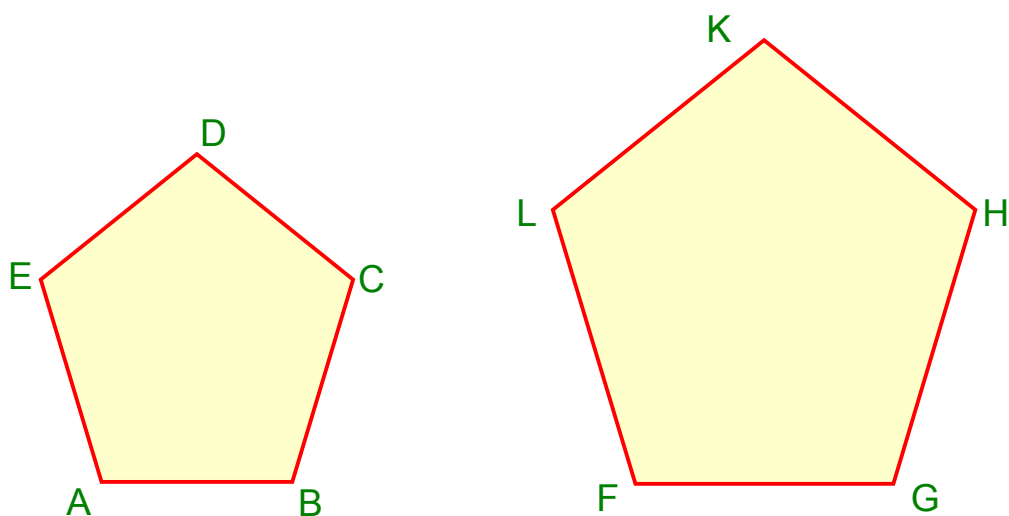
3. Tunnus

Kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on sarnased.

4. Tunnus

Kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk mis ühes kolmnurgas asub pikema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas, siis kolmnurgad on sarnased.

18. HULKNURKADE SARNASUS



Sarnastel hulknurkadel on küljed võrdelised ja vastavad nurgad võrdsed.

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HK} = \frac{DE}{KL} = \frac{EA}{LF}$$

$$\angle A = \angle F, \angle B = \angle G, \angle C = \angle H, \angle K = \angle D, \angle E = \angle L$$

ÜMBERMÕÖDUD

Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega ehk sarnasusteguriga, st

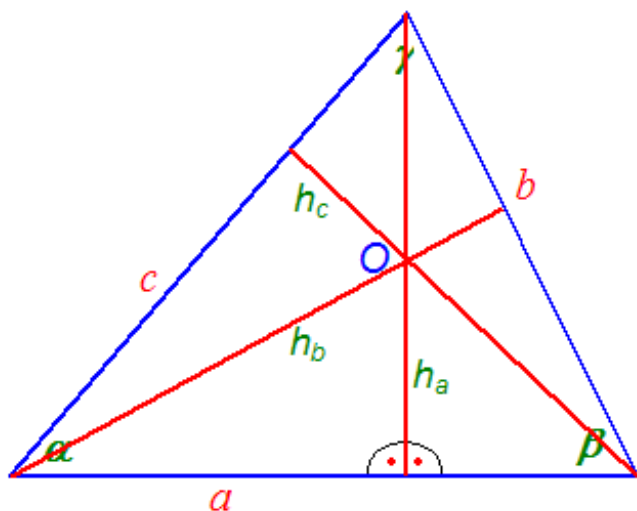
$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HK} = \frac{DE}{KL} = \frac{EA}{LF} = \frac{P_1}{P_2} = k, \text{ kus } k \text{ on sarnasustegur}$$

PINDALAD

Kahe sarnase hulknurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga ehk sarnasusteguri ruuduga, st

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

19. MEETRILISED SEOSSED KOLMNURKAS

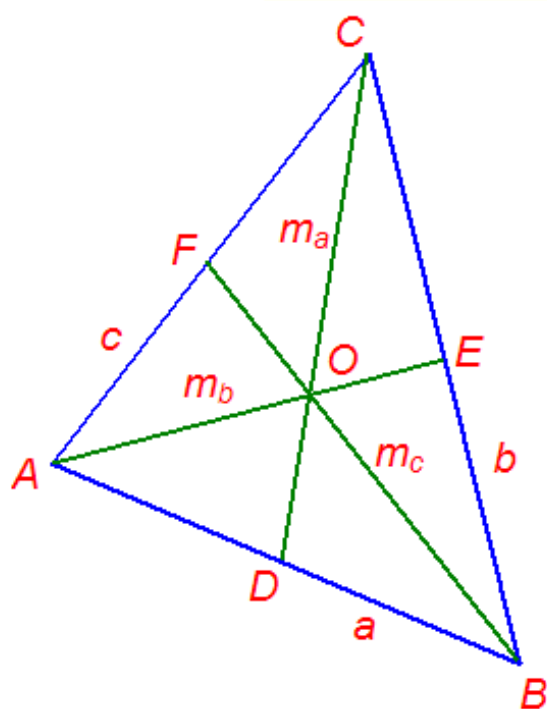


- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ - sisenurkade summa
- $a + b > c$, $a + c > b$ ja $b + c > a$
- kolmnurga kõrgused h_a , h_b ja h_c lõikuvad ühes punktis
- teravnurkses kolmnurgas asub punkt O kolmnurga sees, täisnurkses küljel ja nürinurkses väljaspool kolmnurka

$$\text{Pindala } S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

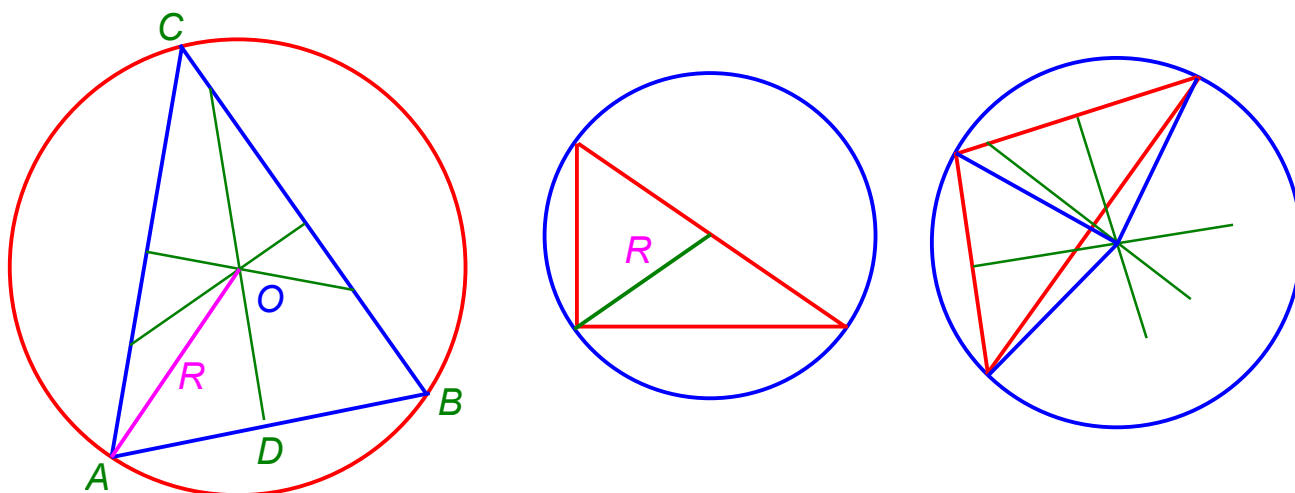
Mediaanid ehk küljepoolitajad



1. lõikuvad ühes punktis
2. $BO:OF = CO:OD = AO:OE = 2 : 1$
3. Mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks osaks, näiteks $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DBC}$
4. Kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks.
5. Punkti O nimetatakse ka *raskuskeskmeks*.

20. MEETRILISED SEOSSED KOLMNURGAS II

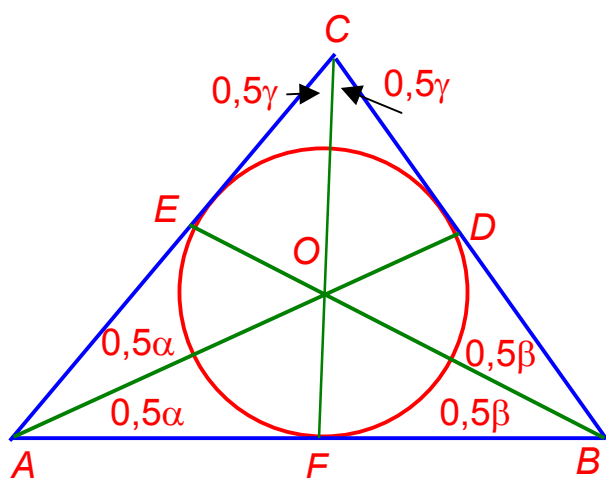
Kolmnurga ümberringjoon



Ümberringjoone keskpunkt asub *keskristsirgete lõikepunktis*. Täisnurkses kolmnurgas on see hüpotenuusi keskpunkt, nürinurkses kolmnurgas asub väljaspool kolmnurka.

Kolmnurga siseringjoon

Kolmnurga siseringjoone keskpunkt on nurgapoolitajate lõikepunkt.



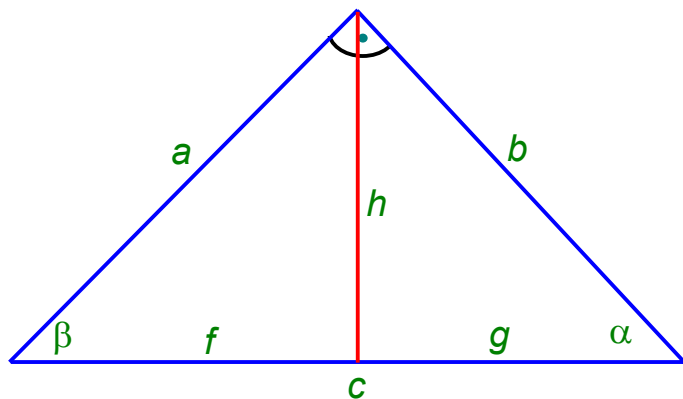
Sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje osadeks, mis on võrdelised nurga lähiskülgedega:

$$BD : DC = AB : AC$$

Nurga poolitaja jaotab pindala võrdeliselt lähiskülgedega:

$$S_{ABD} : S_{ADC} = AB : AC$$

21. KOLMNURK



* Pythagorase teoreem:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

* Eukleidese teoreem:

$$a^2 = f \cdot c \quad \text{ja} \quad b^2 = g \cdot c$$

* Teoreem kõrgusest:

$$h^2 = f \cdot g$$

* $a \cdot b = h \cdot c$, $S = 0,5ab$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta, \quad \frac{f}{a} = \cos\beta, \quad \frac{h}{f} = \tan\beta, \quad \frac{h}{b} = \sin\alpha, \quad \frac{g}{b} = \cos\alpha, \quad \frac{h}{g} = \tan\alpha$$

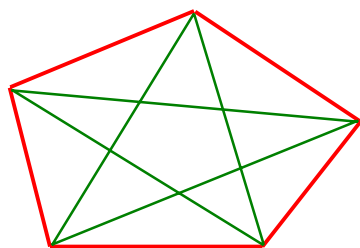
Kolmnurga pindala valemid

$$S = 0,5ah$$

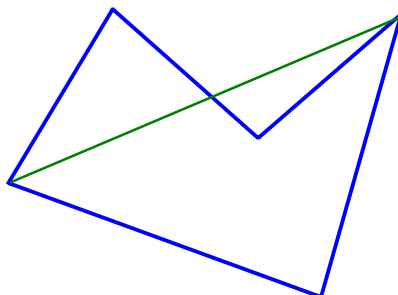
$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Võrdkülgse kolmnurga pindala $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

22. HULKNURK

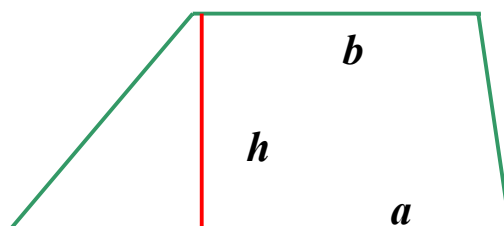
Kumer hulknurk



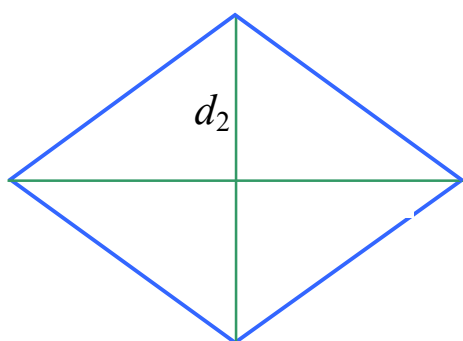
Mittekumer hulknurk

Kumera hulknurga sisenurkade summa on $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Diagonaalide arv $d = \frac{n(n - 3)}{2}$.

TRAPETS

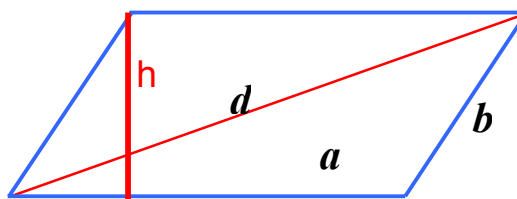
$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

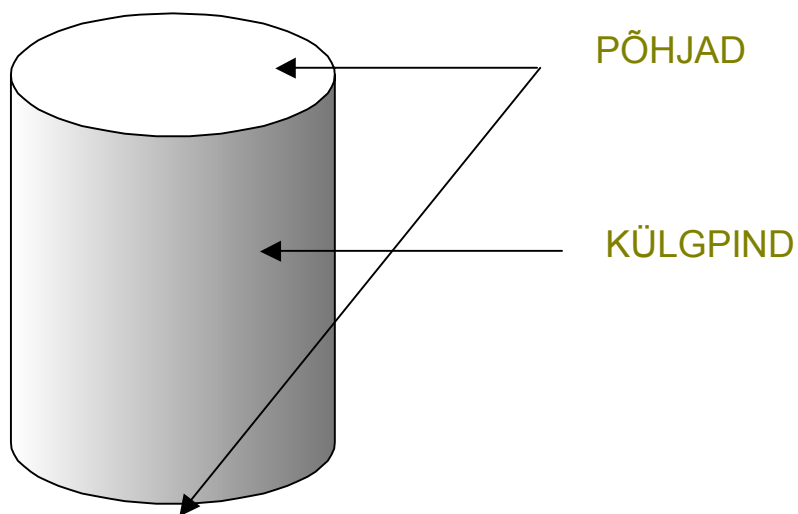
ROMB

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

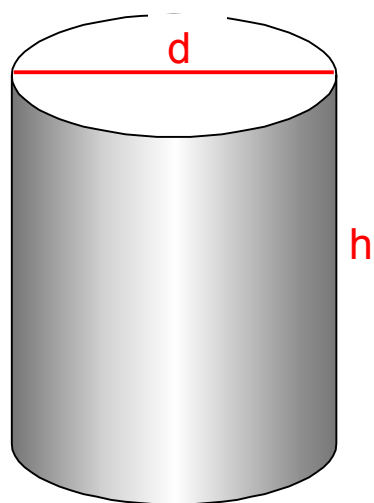
RÖÖPKÜLIK

$$S = ah$$



23. SILINDER

SILINDRIL ON 2 PÕHJA - NEED ON RINGID
SILINDRI KÜLGPINNALAOTUS ON RISTKÜLIK

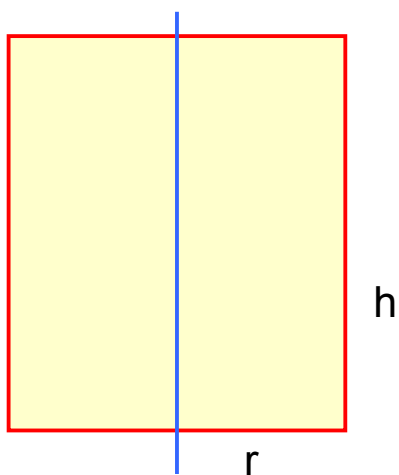


$$S_p = \pi r^2$$

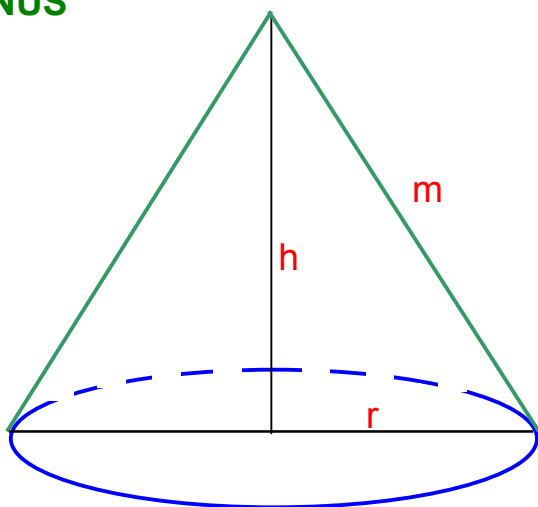
$$S_k = 2\pi r h$$

$$S_t = 2S_p + S_k = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$



Silindri telglõige

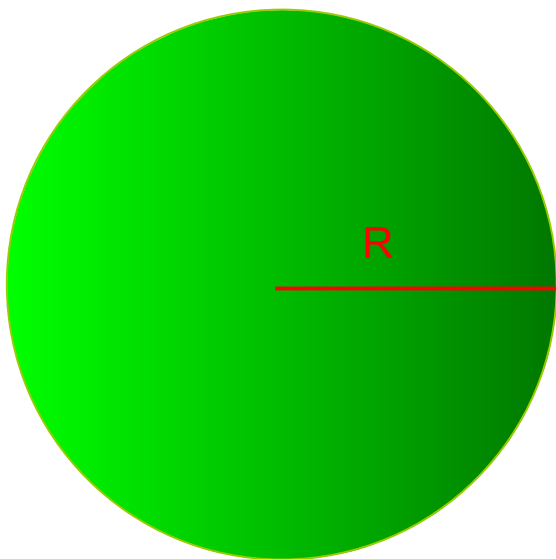
24. KOONUS JA KERA**KOONUS**

$$S_p = \pi r^2$$

$$S_k = \pi r m$$

$$S_t = \pi r(r + m)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

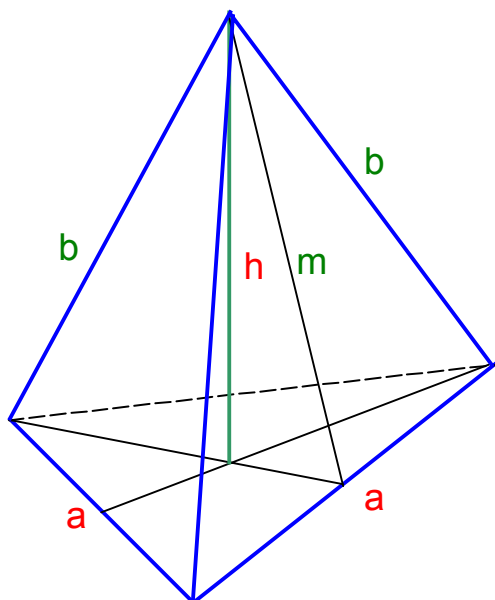
KERA

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

25. PÜRAMIID

Korrapärane kolmnurkne püramiid

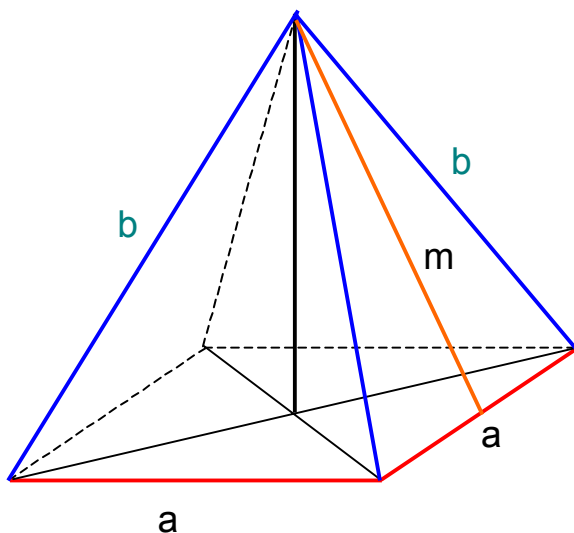


$$S_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_k = 3 \cdot \frac{am}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S_p h$$

Korrapärane nelinurkne püramiid



$$S_p = a^2$$

$$S_k = 2am$$

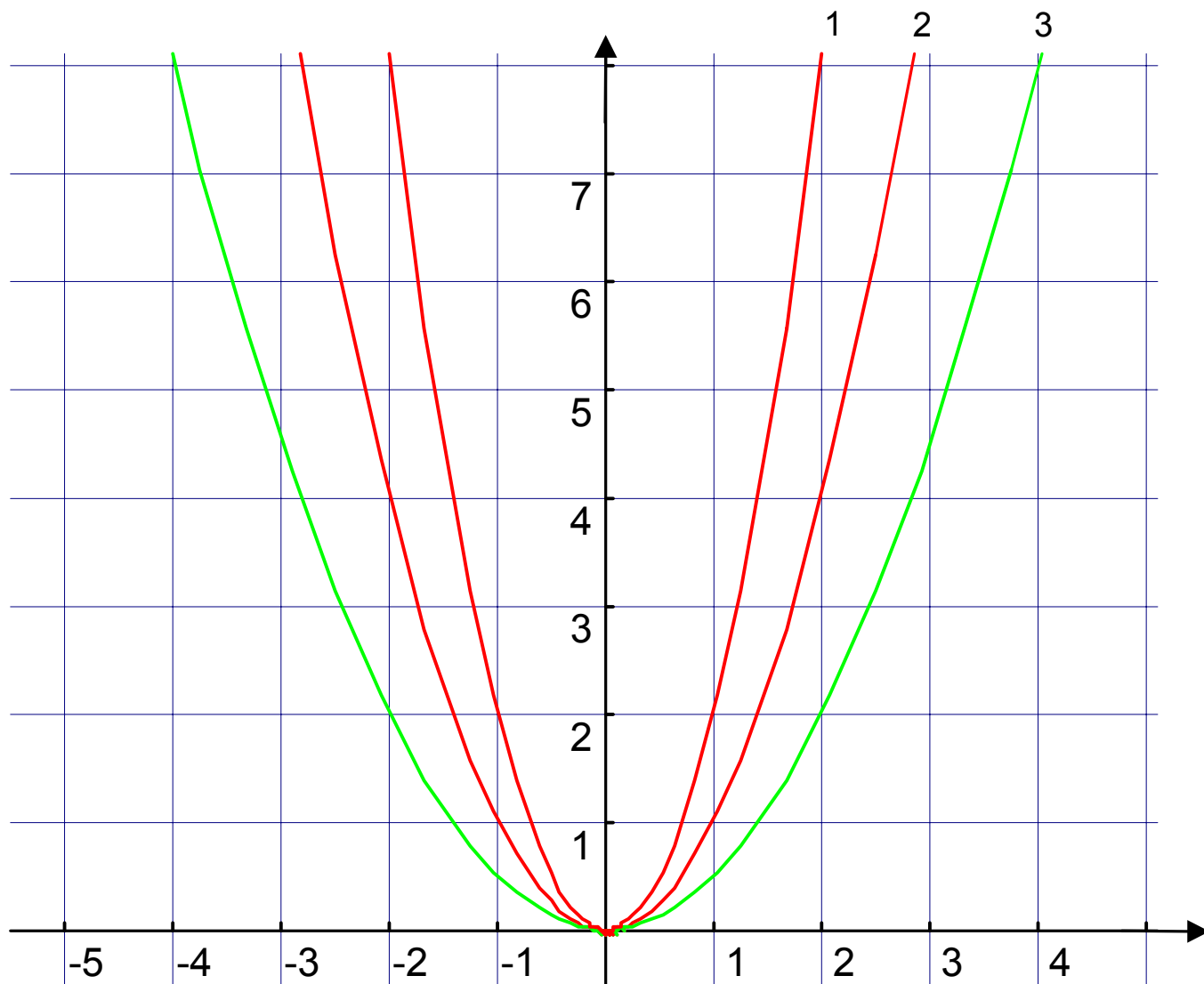
$$V = \frac{1}{3} a^2 h$$

26. RUUTFUNKTSIOON $y = ax^2$, $a > 0$

1) $y = 2x^2$

2) $y = x^2$

3) $y = 0,5x^2$

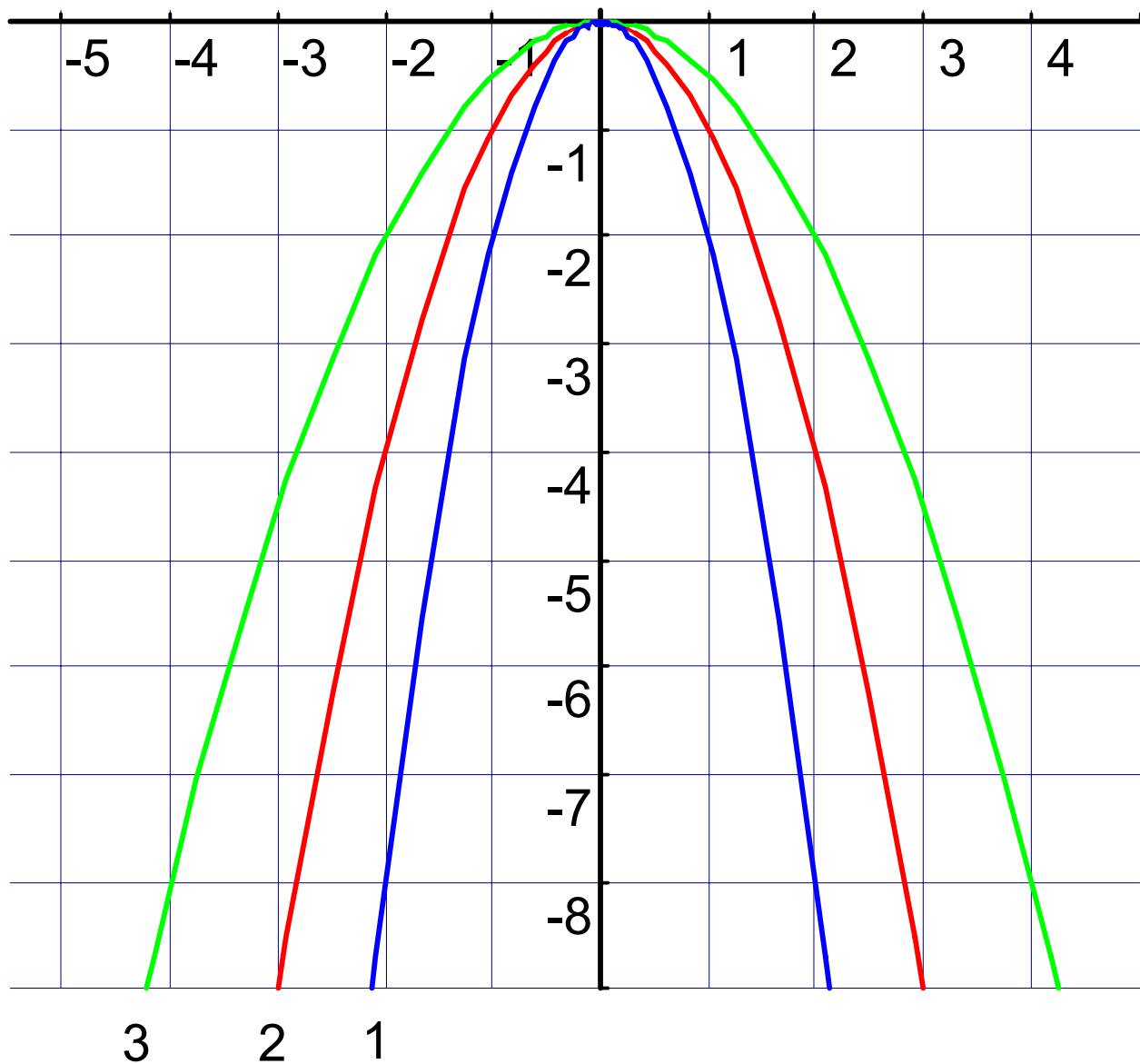


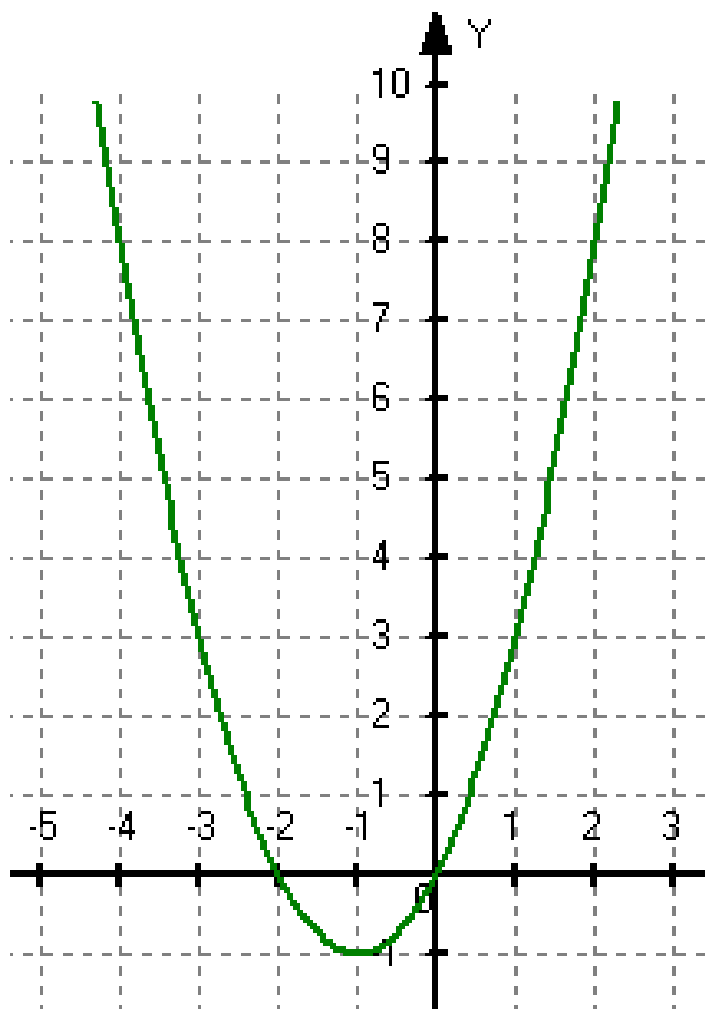
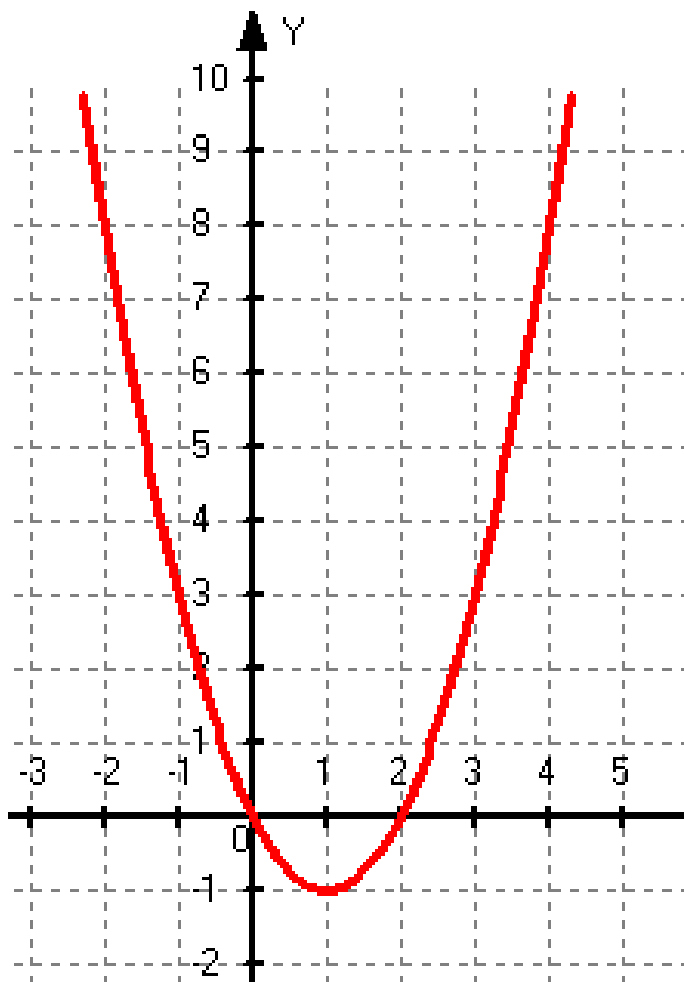
27. RUUTFUNKTSIOON $y = ax^2$, $a < 0$

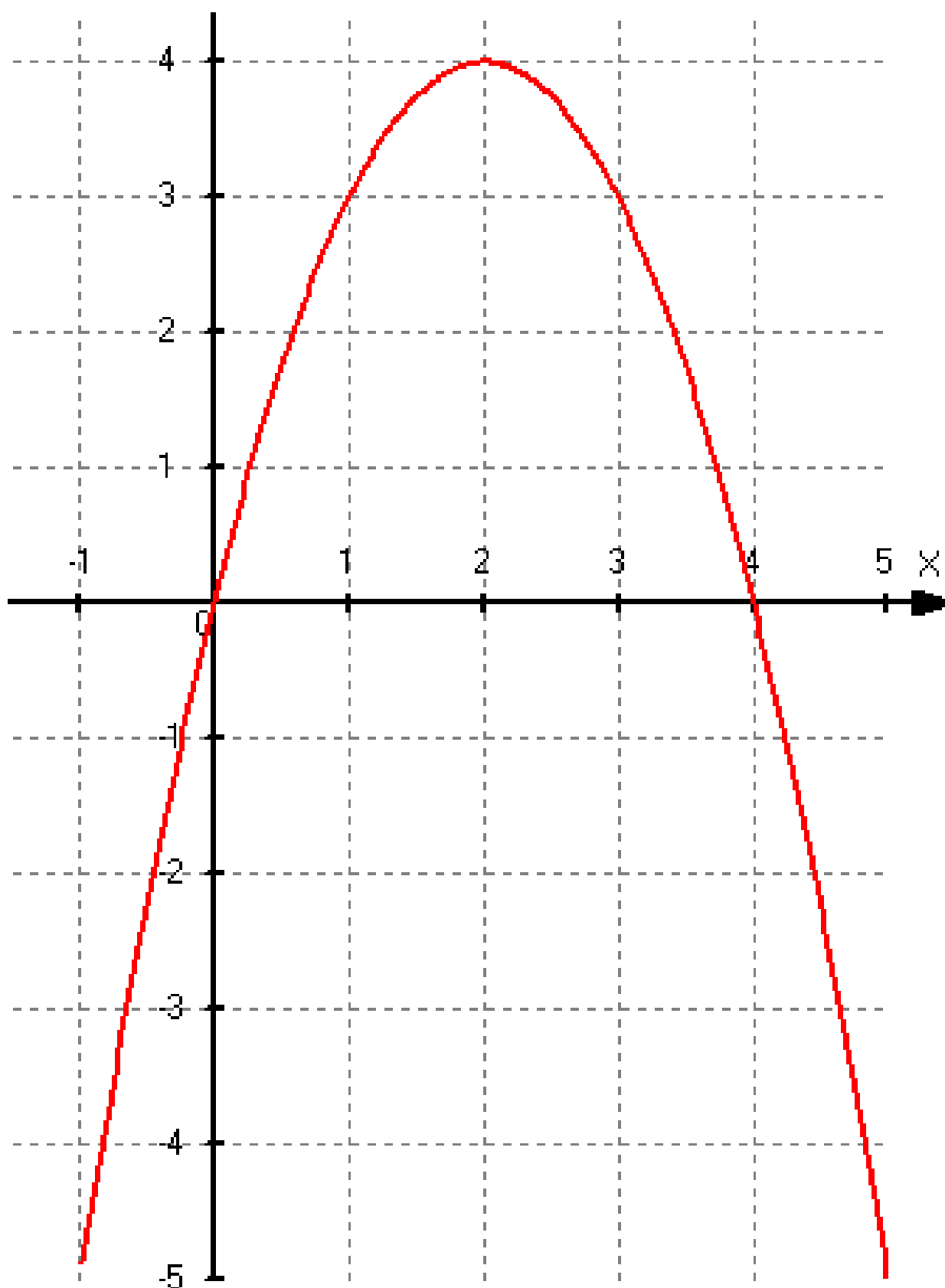
1) $y = -2x^2$

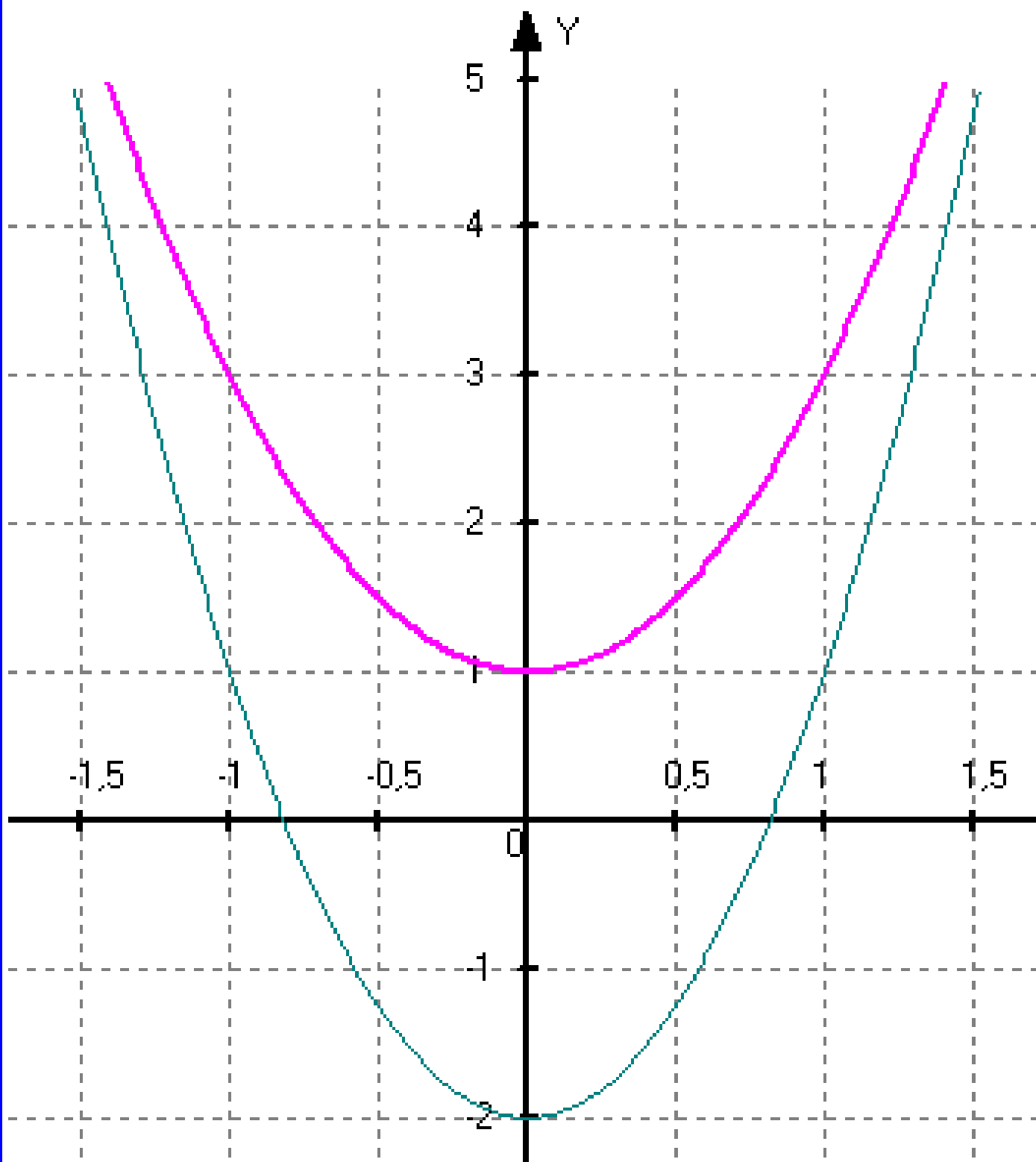
2) $y = -x^2$

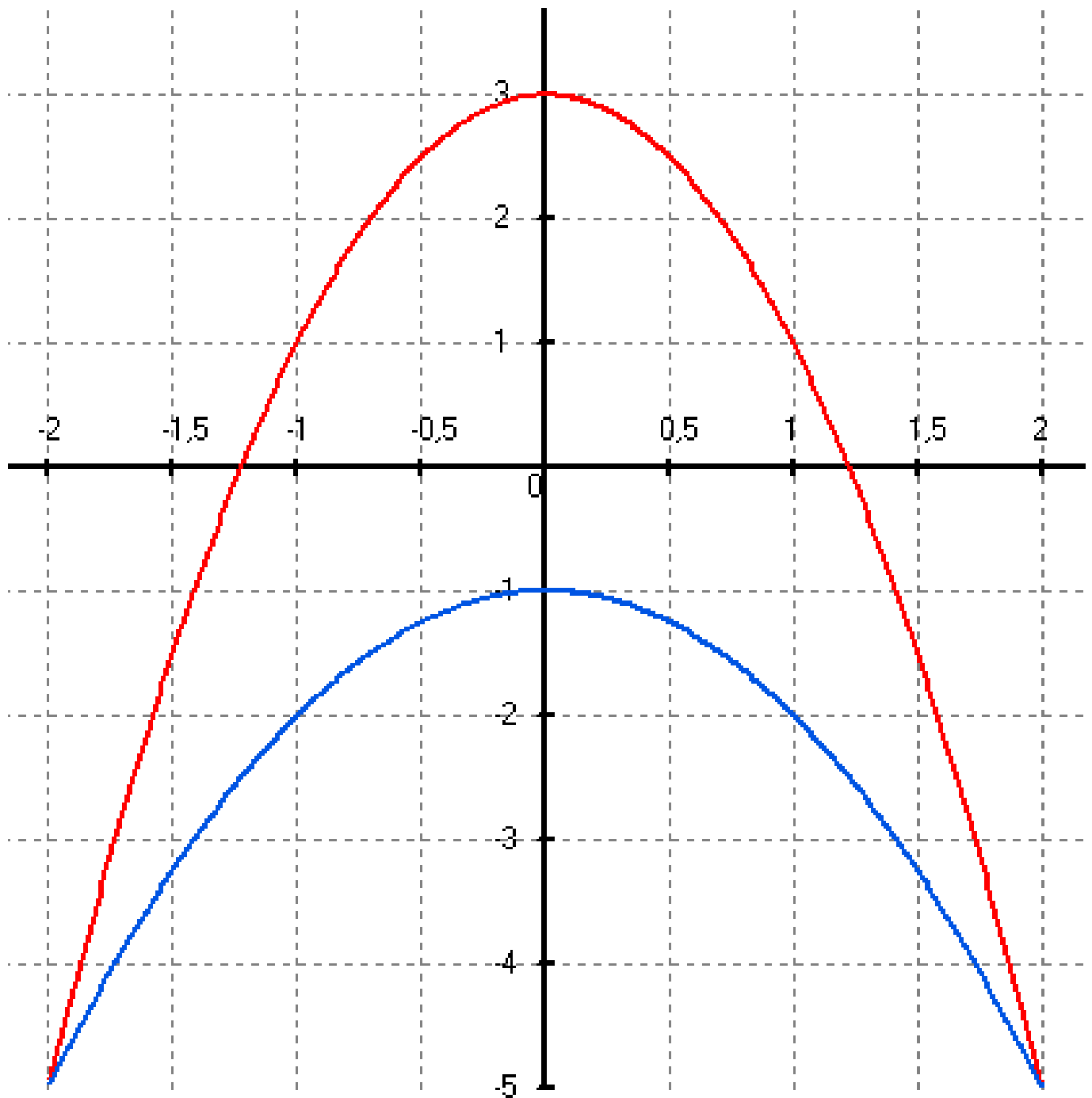
3) $y = -0,5x^2$

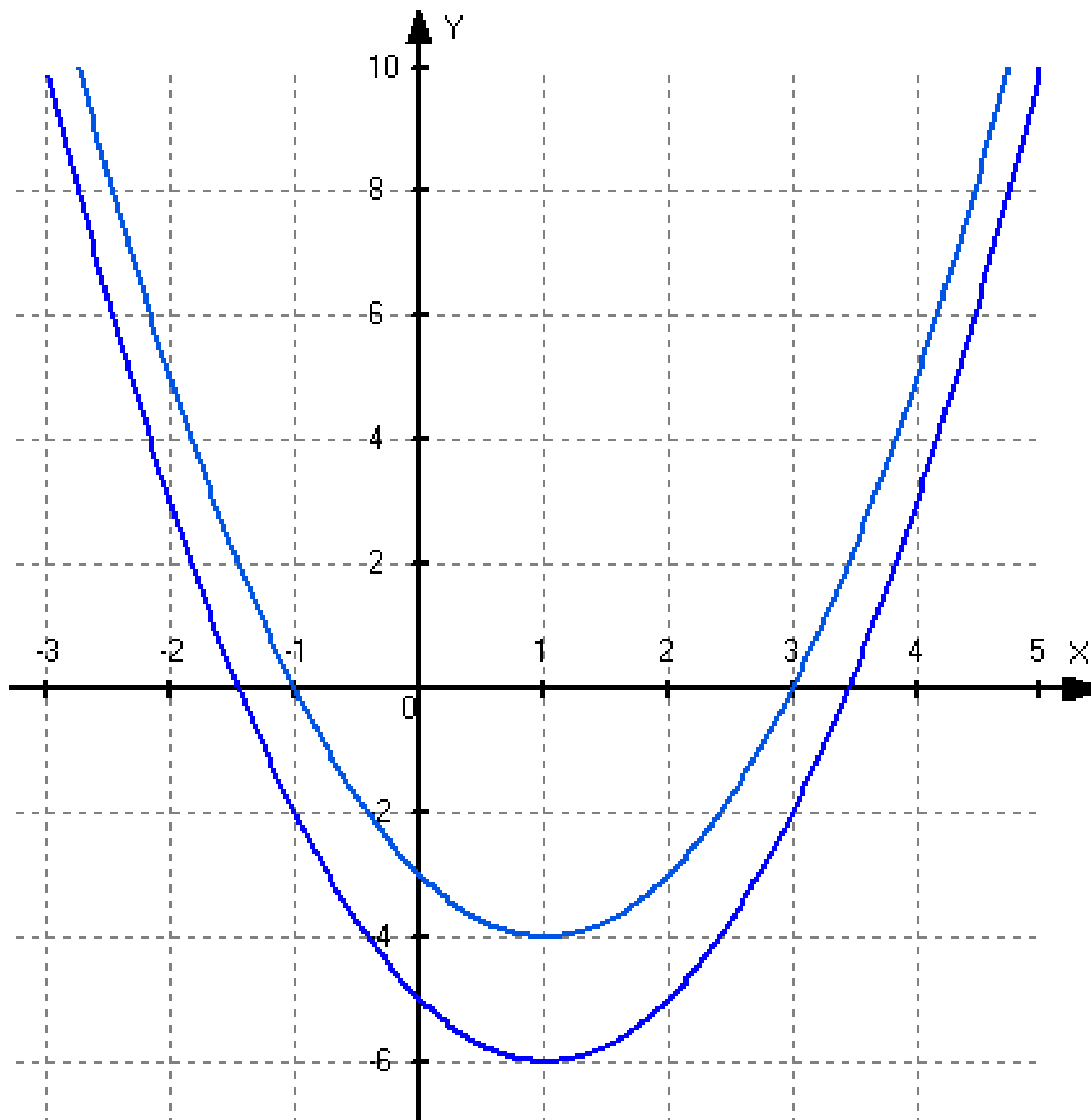


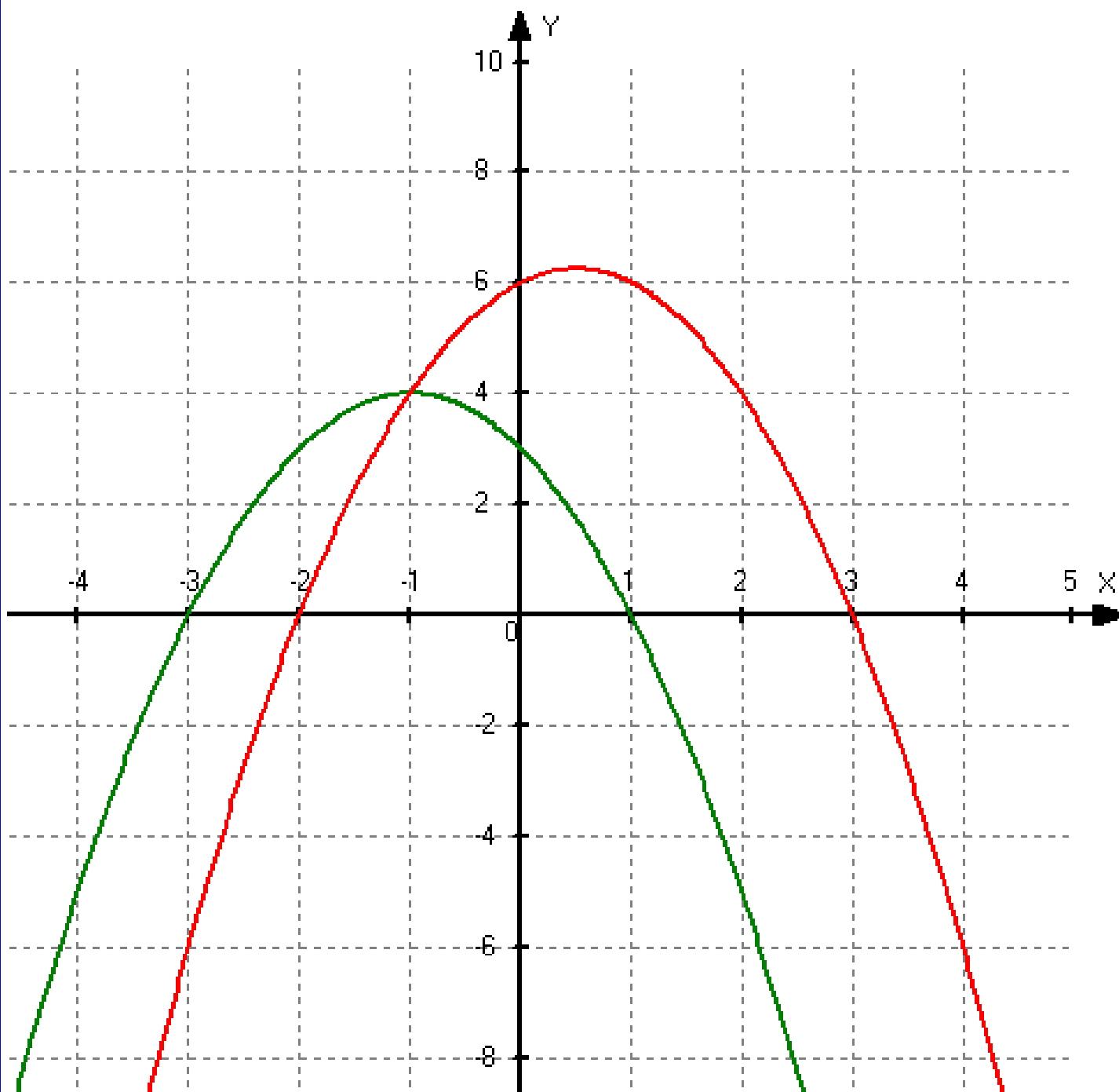
28. Funktsioon $y = ax^2 + bx$, $a > 0$ 

29. Funktsioon $y = ax^2 + bx$, $a < 0$ 

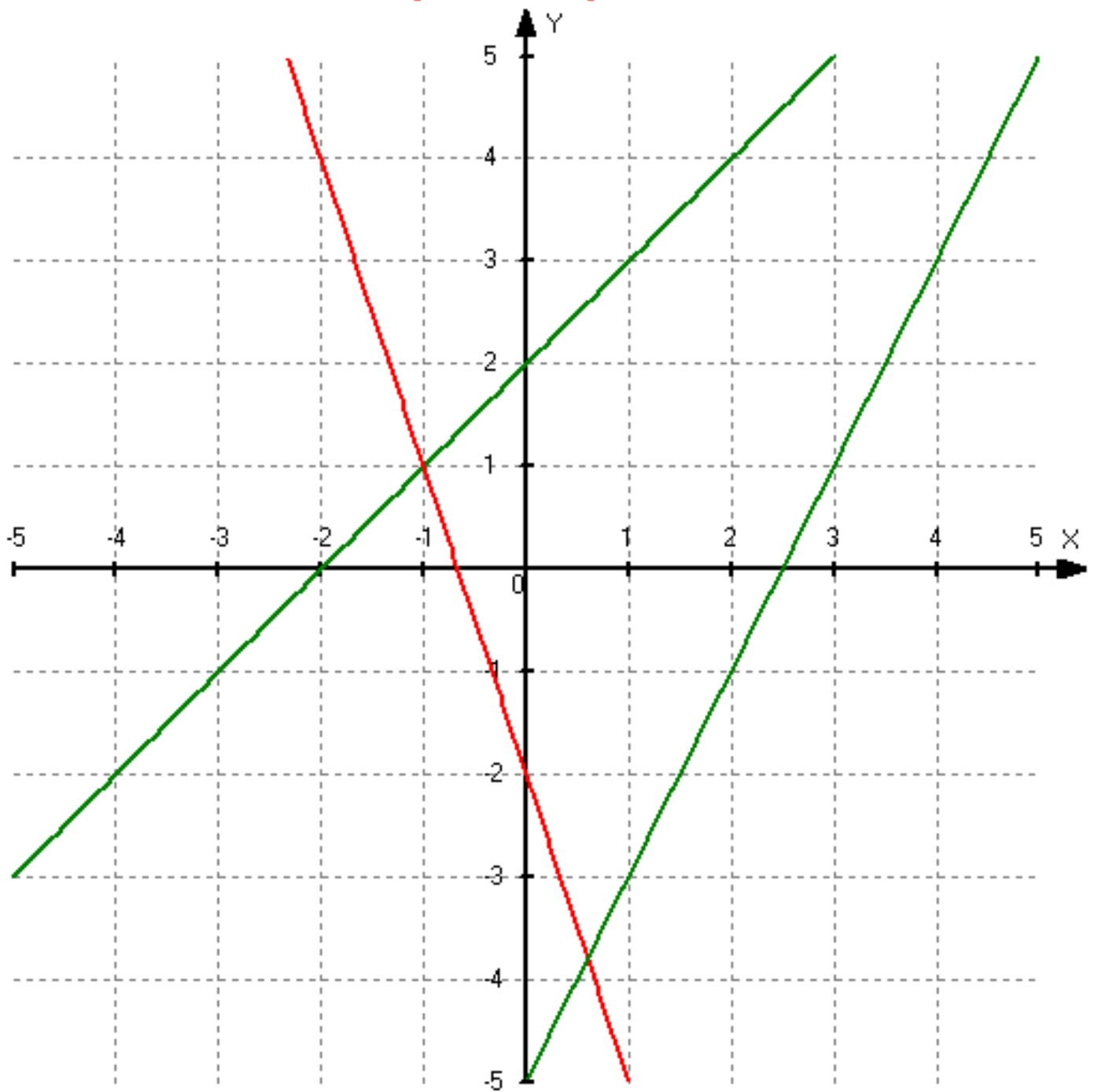
30. Funktsioon $y = ax^2 + c, a > 0$ 

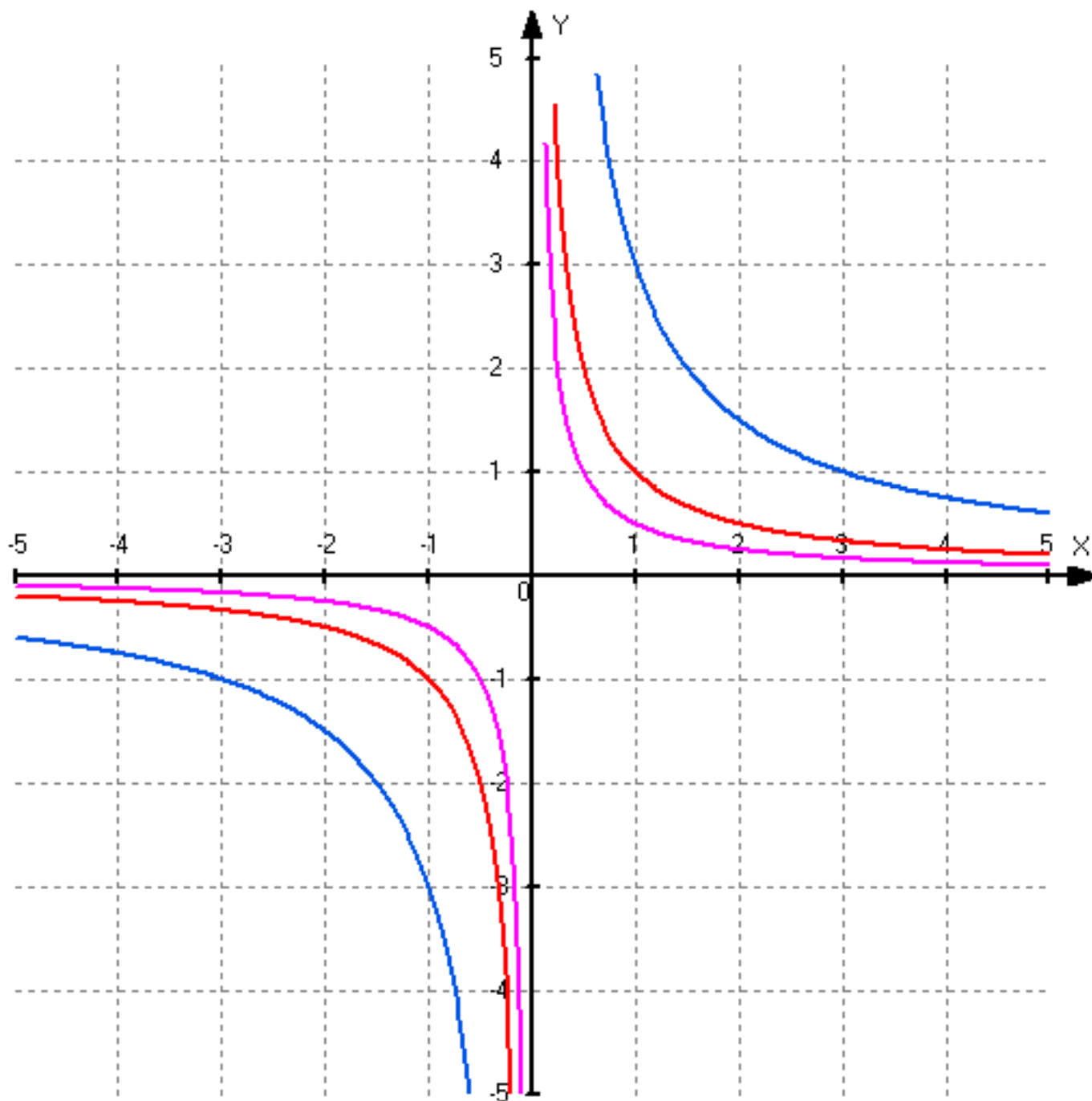
31. Funktsioon $y = ax^2 + c$, $a < 0$ 

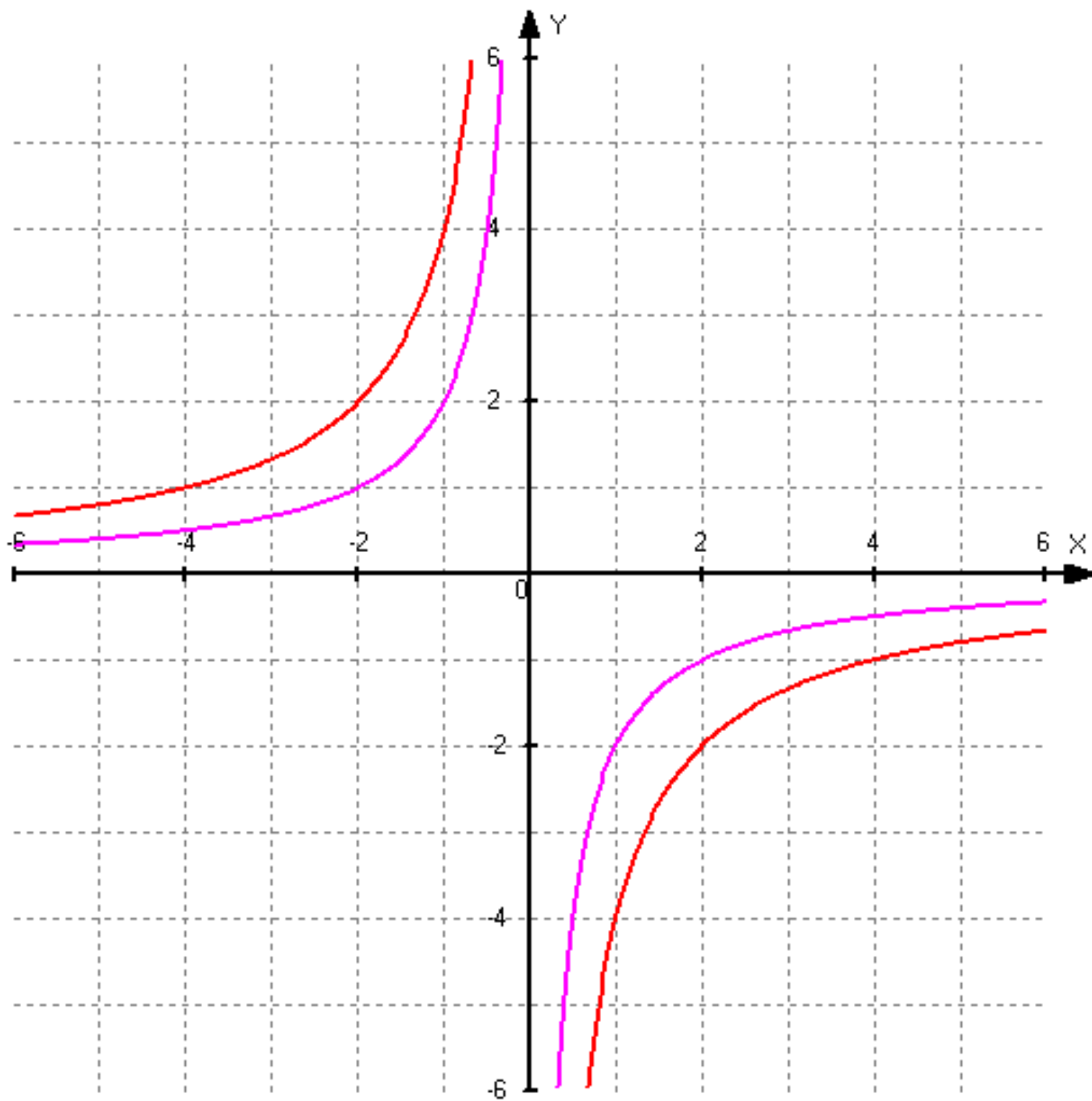
32. Funktsioon $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ 

33. Funktsioon $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ 

34. Linearfunktsiooni graafik



35. Pöördvõrdelise seose graafik ($y = k : x, k > 0$)

36. Pöördvõrdelise seose graafik ($y = k : x, k < 0$)

37. STATISTIKA ELEMENDID

Näide: täringuviskel saadud silmad on

3, 1, 6, 3, 4, 2, 1, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 6, 5, 2, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 2, 5, 6, 1, 6

Kui see rida järjestada kasvavalt või kahanevalt, siis tekib

variatsioonirida:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

Aritmeetilise keskmise saame, kui leiame silmade summa ja jagame heidete arvuga:

$$\bar{x} = \frac{101}{29} \approx 3,48.$$

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, **3, 3, 3, 3, 3, 3, 3**, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

Mood – arvureas kõige sagedamini esinev arv, antud juhul $M_0 = 7$

Mediaan – variatsioonirea keskmine element

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, **3**, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

$$M_e = 3$$

Kui variatsioonireas on paarisarv liikmeid paarisarv, siis on mediaaniks “keskkohast” järgmine arv:

1, 2, 3, 3, **4**, 4, 5, 6

$$M_e = 4$$

Märkus: mõnikord võetakse sel juhul mediaaniks kahe keskmise arvu poolsumma, s.t. antud juhul

$$(3 + 4) : 2 = 3,5$$